ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 18 NOVEMBRE 1918.

PRÉSIDENCE DE M. P. PAINLEVÉ.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Ministre de l'Instruction publique** adresse ampliation du décret qui porte approbation de l'élection que l'Académie a faite de M. le Maréchal **Foch** pour occuper, dans la division des académiciens libres, la place vacante par le décès de M. *Léon Labbé*.

M. le **Président** donne lecture de ce décret et s'exprime ensuite en ces termes :

Monsieur le Maréchal,

C'est pour l'Académie une joie et une fierté profondes de vous souhaiter la bienvenue. Et qu'il me soit permis de mêler à l'expression de ces sentiments le souvenir personnel des longs mois où il m'a été donné de collaborer avec vous. Ensemble, nous avons connu des jours difficiles, auxquels vous faisiez face avec cet optimisme perspicace et cette robuste intrépidité qui vous sont propres. Je ne puis me rappeler sans émotion ce matin de novembre 1917, où je vous ai dit adieu dans la petite gare de Lombardie, d'où vous partiez pour le quartier général italien, vers ce fleuve, la Piave, dont le nom était dans toutes les bouches et dont le sort nous causait tant d'angoisses. Vous partiez là-bas seul, nos légions encore en arrière, seul, mais avec votre prestige de vainqueur de l'Yser et votre coup d'œil de chef. Et, quelques jours après, sur les bords de la Piave, le miracle de l'Yser se

renouvelait. Depuis lors, vous avez accompli d'autres merveilles. Vous avez arrêté, puis refoulé les hordes cruelles et arrogantes qui, déjà, croyaient tenir Amiens, détruire Paris; sous vos coups redoublés, vous avez fait tomber en poussière leur cuirasse de béton qui se croyait indestructible, puis, vous les avez fait tomber à genoux sur place. Aujourd'hui, nos armées atteignent Metz, Strasbourg, le Rhin, — noms magiques —, sans qu'aucune résistance ose désormais s'opposer à leur marche. Le rêve dans lequel les hommes de nos générations ont été élevés, enfants et jeunes hommes, et que nous craignions de ne pas voir réalisé avant de disparaître, il est là, nous le vivons. Par votre génie, c'est la France, si longtemps courbée sous le poids d'une défaite imméritée, qui connaît la gloire de mener à la victoire les armées de la civilisation.

Il y a cent vingt-deux ans, l'Académie des Sciences accueillait dans son sein le vainqueur d'Arcole et de Rivoli; aujourd'hui, pour reprendre les paroles lapidaires que vous adressiez hier aux soldats de la République, nous saluons en vous, monsieur le Maréchal, le vainqueur de la plus grande bataille de l'Histoire et le défenseur victorieux de la plus noble des causes : la liberté du monde.

M. Appell, en présentant à l'Académie la deuxième édition du *Précis de Mécanique rationnelle*, qu'il a publié en collaboration avec M. Dautheville, s'exprime comme il suit :

Cette édition est loin d'être une réimpression pure et simple de la première. Sans parler des perfectionnements de détail, je me bornerai à indiquer que deux Chapitres nouveaux, relatifs, l'un aux éléments de la *Statique graphique*, l'autre à ceux de la *Résistance des matériaux*, ont été ajoutés; les exercices ont été renouvelés en grande partie.

Le volume est dédié à la mémoire du capitaine d'Artillerie Albert Gauthier-Villars, mort à son poste de commandement, le 14 juillet 1918.

ÉLECTIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à l'élection d'un correspondant pour la section de botanique, en remplacement de M. *Grand'Eury*, décédé.

Au premier tour de scrutin, le nombre de votants étant 44,

M. Battandier	obtient	. . . . . .	27 suffrages
M. Leclerc du Sablon	»	. . . . . .	14 »
M. Houard	»	. . . . . .	2 »
M. Sauvageau	»	. . . . . .	1 suffrage

M. J.-A. **Battandier**, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est élu correspondant de l'Académie.

CORRESPONDANCE.

M. **Velu** adresse des remercîments pour la distinction que l'Académie a accordée à ses travaux.

Mme **Henry Billet** adresse des remercîments pour la distinction que l'Académie a accordée aux travaux de son mari.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les groupes* complexes *de rationalité et sur l'intégration par quadratures.* Note de M. **Jules Drach**.

I. La théorie d'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles que j'ai développée sous le nom de *théorie de la rationalité* ou d'*intégration logique* [1], amène à définir les transcendantes les plus simples $Z_1, \ldots, Z_n$ qui satisfont à une équation

$$(a) \qquad X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

où les A appartiennent à un domaine de rationalité [R], par un système *normal* (Ω) :

$$J_i = \frac{l_i}{l_{k+1}} = -\frac{\Delta_i\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\Delta\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right)} \qquad (i = 1, \ldots, k);$$

---

[1] Cf. *Comptes rendus*, t. 151, 1910, p. 192, et *Proceedings* du Congrès international des Mathématiciens, Cambridge, 1912.

où les l_i sont des polynomes en Z, $\frac{\partial Z}{\partial z}$, ..., les Δ des polynomes en $\frac{\partial z}{\partial x_i}$, ..., dont les coefficients appartiennent à [R]; les variables z n'intervenant qu'*en apparence*.

Les J_i sont les invariants différentiels, rationnellement distincts, d'un groupe de transformations des Z qui est le *groupe de rationalité* (Γ) de l'équation (*a*); les l_i sont les invariants *relatifs* du même groupe.

Le système *résolvant* dont dépendent les J_i, admet une solution rationnelle et une seule. On sait que les l_i subissent, pour toute transformation des z, une transformation linéaire; le système résolvant correspondant est donc linéaire.

Le groupe Γ est, en général, un groupe *complexe*, qui comprend un certain *noyau* Γ_0, engendré par des transformations infinitésimales, au sens de Lie, et par un groupe fini de transformations permutables avec Γ_0.

Cette observation entraîne, *dans la recherche des cas de réduction d'une équation* (*a*) *en partant de l'étude d'un élément*, J_i ou l_i, des conséquences à signaler :

Si l'on forme pour un élément J, fonction rationnelle des $\frac{\partial Z_i}{\partial x_k}$, ... (ou polynome), le système résolvant (Σ) dont il dépend, ce système admet également comme solutions un nombre limité d'éléments *homologues* de J, qu'on déduit de ce dernier par un mécanisme régulier.

Ces éléments homologues, regardés comme dépendant des variables $\frac{\partial Z_i}{\partial x_k}$, ..., ne sont pas fonctionnellement distincts : ils sont liés par des relations algébriques identiques (*syzygies*). Ils comprennent toujours les fonctions qu'on peut déduire de J par une permutation des Z_i.

Le système résolvant (Σ) peut admettre une seule solution rationnelle; mais il peut se faire aussi bien que (Σ) possède un nombre limité, q, de solutions liées algébriquement à [R]. Le nombre q est *normalement* au plus égal à celui des éléments *homologues* de J {c'est-à-dire que, sans qu'il en résulte des relations d'*égalité* entre les coefficients A_i et leurs dérivées, tous les homologues de J peuvent être algébriques dans [R]}; s'il est plus grand, (Σ) est dit *singulier*.

C'est l'existence de ces solutions algébriques et des permutations qui les échangent qui fait qu'un groupe de rationalité Γ peut être *complexe*.

Quelques exemples simples éclaireront ces généralités.

II. Soient

(1)
$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y' + \frac{\partial z}{\partial y'} \varphi(x, y, y') = 0$$

l'équation qui correspond à une équation différentielle ordinaire du second ordre, u et v deux solutions de (1) formant un système fondamental.

Si l'on forme la résolvante pour la fonction $\mu = \frac{\partial u}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial y'}$, c'est-à-dire $X(\mu) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\mu - \mu^2$; cette résolvante peut avoir une solution rationnelle, auquel cas la solution u est définie par un système complet isolé, mais elle peut posséder aussi les deux solutions algébriques :

$$\mu_1 = \alpha + \sqrt{\Delta}, \qquad \mu_2 = \alpha - \sqrt{\Delta},$$

où α et Δ sont rationnels, Δ n'étant pas carré d'une fonction de [R].

Le groupe de rationalité, complexe, devient imprimitif par l'adjonction de $\sqrt{\Delta}$; les trois invariants relatifs $\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y'}\frac{\partial v}{\partial y'}$ sont homologues. On fixerait aisément des cas où l'intégration s'achève par quadratures. Si l'équation (Σ) admet plus de deux solutions algébriques, elle est *singulière* dans [R].

III. *Equations différentielles linéaires.* — Ces remarques s'appliquent à la théorie classique donnée par M. E. Picard pour les équations différentielles linéaires : elles ne sont pas nouvelles ici et les exemples d'éléments homologues surabondants, liés par des relations algébriques, sont bien connus. Cependant certaines conséquences de l'existence des groupes complexes de rationalité ne paraissent pas avoir retenu l'attention.

a. Par exemple une équation linéaire d'ordre n à coefficients rationnels dans [R] peut admettre toutes les solutions d'une autre équation de même nature et d'ordre moindre, auquel cas elle est *réductible* au sens de Frobenius, mais elle peut aussi posséder toutes les solutions de q équations d'ordre p, algébriquement liées au domaine [R], pourvu que n surpasse pq. L'adjonction d'une fonction algébrique du domaine [R], de degré q inférieur à n, réduit alors l'équation donnée à une équation d'ordre $n - pq$. On forme ainsi sans difficulté l'équation linéaire du quatrième ordre à coefficients rationnels, qui admet toutes les solutions de deux équations du second ordre avec une irrationnelle quadratique; ces dernières s'écrivent

$$y'' + \left(\frac{3}{2}\frac{\Delta'}{\Delta} + \frac{P'}{P}\right)y' + \left(P + \frac{3}{2}\frac{P'}{P}\frac{\Delta'}{\Delta} - \frac{P''}{P} + \frac{P'^2}{P^2}\right)y + \sqrt{\Delta}\left(y' + \frac{P'}{P}y\right) = 0,$$

où P et Δ sont quelconques mais *rationnels dans* [R] sans que $\sqrt{\Delta}$ le soit.

b. Si l'on considère une équation du second ordre, à coefficients rationnels dans [R] : $y'' + 2py' + qy = 0$, on sait que la résolvante en $\frac{y'}{y} = \rho$ est

$$\rho' + \rho^2 + 2p\rho + q = 0.$$

Cette équation peut avoir une solution rationnelle, mais elle peut posséder aussi deux solutions algébriques :

$$\rho_1 = \alpha + \sqrt{\Delta}, \qquad \rho_2 = \alpha - \sqrt{\Delta},$$

et l'on détermine aisément p et q, en laissant α et Δ rationnels et arbitraires dans [R]. On peut même supposer $p = 0$.

c. De même, la résolvante en $\frac{y'}{y} = \rho$ relative à une équation du troisième ordre, peut admettre deux solutions $\rho = \alpha \pm \sqrt{\Delta}$, où α, Δ appartiennent à [R] et l'équation linéaire s'intégrera alors par quadratures. On peut même supposer nul le coefficient de y'' et l'on aura des formes très simples pour les intégrales.

Il semble donc que la considération des groupes de rationalité *complexes* fasse apparaître *des catégories nouvelles d'équations intégrables par quadratures*, les équations signalées jusqu'ici étant relatives au cas où le groupe de rationalité est *intégrable* au sens de Lie, c'est-à-dire engendré par ses transformations infinitésimales.

On formerait aisément les nouveaux types où la nature arithmétique de n intervient. Par exemple si $n - i = pq$, il existe des cas où l'adjonction d'une irrationnelle d'ordre q peut donner q équations intégrables au sens de Lie et d'ordre p; il restera une équation d'ordre i qui peut être aussi intégrable.

Je reviendrai ailleurs, en détail, sur ces divers points.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions polygonales périodiques.* Note de M. TRAJAN LALESCO.

On peut appeler ainsi les fonctions dont le diagramme dans l'intervalle fondamental est composé de segments rectilignes formant une ligne brisée d'ailleurs quelconque (pouvant contenir des segments verticaux).

Ces fonctions se rencontrent fréquemment dans la Physique mathéma-

tique, particulièrement en Electrotechnique. Elles sont évidemment aussi à la base de la théorie des fonctions d'une variable réelle. Employées avec succès par MM. Volterra, Lebesgue et tout récemment par M. D. Jackson dans l'étude de l'approximation des fonctions de variable réelle, elles admettent un développement de Fourier remarquable qui me semble présenter un intérêt à la fois théorique et pratique.

On peut établir à leur sujet, les théorèmes suivants :

I. Soit une fonction polygonale dont le diagramme n'est formé que de segments horizontaux et verticaux (fonction à sauts); soient $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_p$ les sauts qu'elle présente aux points $x_0 = 0,\ x_1,\ \ldots,\ x_p = 2\pi$ et qui la caractérisent. Le terme général du développement de Fourier de cette fonction est

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{p}\sigma_k\frac{\sin n(x-x_k)}{n}.$$

II. Soit une fonction polygonale *continue*, dont le diagramme est formé par des segments rectilignes quelconques; soient $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_q$ les écarts angulaires que présente la fonction aux points $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_q = 2\pi$ et qui, à une constante près, la caractérisent. (J'appelle *écart angulaire* le saut brusque du coefficient angulaire dans un point à tangente discontinue.) Le terme général du développement de Fourier de cette fonction a pour expression

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{q}\tau_k\frac{\cos n(x-x_k)}{n^2}.$$

III. La loi générale est maintenant évidente. Parcourons le périmètre du diagramme, en partant du point O et allant jusqu'au point 2π. A chaque saut σ, rencontré en un point x_k, nous introduirons, dans l'expression du terme général, la quantité

$$\frac{1}{\pi}\sigma\frac{\sin n(x-x_k)}{n}$$

et à chaque écart angulaire τ, rencontré en un point x_i, nous introduirons la quantité

$$\frac{1}{\pi}\tau\frac{\cos n(x-x_i)}{n^2}.$$

On peut ainsi écrire sans difficulté le terme général, dans tous les cas. Quelques conséquences théoriques découlent immédiatement de ce résultat. Ainsi par exemple :

1° Tous les théorèmes concernant l'approximation des fonctions continues de variable réelle par des séries trigonométriques et plus généralement par des fonctions orthogonales engendrées par des équations différentielles linéaires, sont susceptibles de précision métrique, dès qu'on introduit des conditions quantitatives (Lipschitz, Dini ou autres). Même pour le théorème général de Weierstrass-Picard, qui est une conséquence immédiate du résultat précédent, on peut assigner une limite supérieure plus précise de l'approximation.

2° Le passage à la limite du développement précédent donne lieu à des phénomènes de Gibbs, aux bords de chaque discontinuité.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Solution élémentaire du problème de l'inversion des fonctions elliptiques.* Note de M. **René Garnier**, présentée par M. Appell.

Les méthodes classiques qui établissent la possibilité de construire une fonction elliptique pu à partir de ses invariants g_2, g_3 (avec $g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$), utilisent soit la théorie analytique des équations différentielles, soit le théorème d'Abel, soit encore les propriétés des fonctions ϑ ; il en est, enfin, qui nécessitent une étude plus ou moins déguisée du domaine et du groupe modulaires. La démonstration qu'on propose ici est tout élémentaire [1] ; elle n'invoque que les théorèmes généraux de la théorie des fonctions de variable complexe : ceux-là mêmes qui, dans les expositions classiques, servent de base à la théorie des fonctions elliptiques.

1. La méthode repose essentiellement sur un artifice dû à M. E. Goursat : soient $2\omega_1$ et $2\omega_2$ les périodes d'une intégrale elliptique $J(z)$; le rapport $\omega_1 : \omega_2$ étant complexe [2], le symbole

$$p[J(z) | 2\omega_1, 2\omega_2]$$

[1] Une démonstration détaillée paraîtra ultérieurement.

[2] En fait, la démonstration actuelle est complètement indépendante de ce théorème, qui, au contraire, en résulte, à titre de conséquence (cf. n° 3).

a un sens et représente une fonction rationnelle $R(z)$. *Résoudre le problème de l'inversion revient à établir que l'ordre de* $R(z)$ *est égal à* 1.

Pour le prouver, sans recourir à la théorie des équations différentielles, je prends $J(z)$ sous la forme

$$J(z) = \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\lambda^2)}}$$

et j'établis le lemme suivant :

Lemme. — *Il existe un nombre positif* μ' *tel que, pour* $|\lambda|$ *inférieur à* μ' *et arbitrairement petit,* $R(z)$ *ne possède aucun pôle à l'intérieur d'un cercle de centre* O, *et de rayon arbitrairement petit, fixé à l'avance.*

2. En effet, considérons l'aire $\mathcal{A}$ intérieure à l'ellipse passant par les points $z = \pm 1$ et de foyers $z = \pm\lambda$; la transformation

$$z = \frac{Z^2 + \lambda^2}{2Z}$$

change $\mathcal{A}$ en une aire $\mathcal{C}$, limitée par deux cercles concentriques à O. Or à l'intérieur de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{C}$ (au sens *strict*), on peut écrire

$$(1)\quad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} F\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; \lambda^2\right) \frac{Z^{4p}+\lambda^{4p}}{(2Z)^{2p}};$$

ce développement rentre d'ailleurs dans la catégorie des développements en séries de polynomes donnés par M. E. Picard; mais, actuellement, il est aisé d'établir directement la formule, et d'en fixer les conditions de validité [1]. Ceci posé, on déduit de (1), par intégration,

$$(2)\quad J_1(z) \equiv \int_\lambda^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-\lambda^2)}} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda^2\right) \operatorname{Log} \frac{Z}{\lambda}$$
$$+ \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2p} \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} F\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}, 2p+1; \lambda^2\right) \frac{Z^{4p}-\lambda^{4p}}{(2Z)^{2p}};$$

or non seulement cette formule est valable pour les mêmes points (z, Z)

---

[1] De la théorie de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ il suffit de connaître la double représentation de F par une série, et par une intégrale définie.

que (1), ce qui fournit, notamment, la relation classique

$$2\omega_1 = 2\pi i F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \lambda^2\right),$$

mais encore elle s'applique au point $z=1$, $Z=1+\sqrt{1-\lambda^2}$, *ce qui permet de développer la période* $2\omega_2$. Pour le voir, on considère la série

$$(3) \qquad \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{v^p}{p} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)(1-\lambda^2 u)}} \qquad (|\lambda|<1),$$

où l'on a posé

$$v = (1+\sqrt{1-\lambda^2})^2 u(1-u)(1-\lambda^2 u)^{-1},$$

et où les intégrales sont étendues le long de l'arc de courbe joignant $u=0$, $u=1$ et sur lequel $v(u)$ reste réel et positif : *sur cet arc on a toujours* $v \leq 1$ (l'égalité n'ayant lieu qu'en un point). On en déduit la convergence de (3), et l'application à (2) du théorème d'Abel relatif aux séries légitime aussitôt notre assertion.

Or la formule (2), ainsi précisée, conduit à la conséquence suivante : *ρ et μ' ne dépendant que de la quantité arbitrairement grande* K *on peut écrire, pour* $|z|<\rho$ *et* $|\lambda|<\mu'$, *l'inégalité*

$$(4) \qquad \left|\mathcal{R}\left(\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}\right)\right| - \left|\mathcal{R}\left(\frac{\pi i J_1(z)}{\omega_1}\right)\right| > K,$$

d'où résulte aussitôt notre lemme.

3. Cela étant, en procédant par continuité à partir des formes dégénérées de pu et de $J(z)$ qui correspondent à $\lambda=0$, on démontre qu'à l'extérieur de $|z|=\rho$, $R(z)$ ne peut posséder qu'un pôle, $z=1$. $R(z)$ est donc d'ordre 1 pour $|\lambda|$ suffisamment petit, et *la transformation de Landen, appliquée à* pu *et à* $J(z)$, *montre que ce résultat subsiste quelle que soit la valeur du module* λ [1].

Le problème de l'inversion se trouve ainsi résolu.

---

[1] Cette remarque, rapprochée de (4), montre que le rapport $\omega_2 : \omega_1$ ne peut être réel pour aucune valeur de $\lambda^2 (\neq 0, 1, \infty)$. Inversement, si l'on considère ce dernier théorème comme établi, on peut démontrer que l'ordre de $R(z)$ est indépendant de λ, sans avoir à utiliser la transformation de Landen.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Généralisations des théorèmes de Jamet sur la courbure des courbes triangulaires, des courbes et des surfaces tétraédrales symétriques.* Note (¹) de M. R. GOORMAGHTIGH, présentée par M. G. Humbert.

Les théorèmes de Jamet (²) relatifs à la courbure des courbes triangulaires, des courbes et des surfaces tétraédrales symétriques sont des cas particuliers des propositions suivantes :

A. COURBES PLANES :

I. Théorème sur les $p^{\text{ièmes}}$ rayons de courbure des courbes triangulaires :

Considérons $p+1$ *courbes triangulaires symétriques d'indices* n_1, n_2, ..., n_{p+1}, *ayant même triangle de symétrie, se touchant en un point* M, *et posons*

$$(n_i - 1)^{-1} = \nu_i;$$

les $p^{\text{ièmes}}$ *rayons de courbure* $\rho_1^{(p)}$, $\rho_2^{(p)}$, ..., $\rho_{p+1}^{(p)}$ *de ces courbes correspondant au point* M (³) *sont liés par la relation linéaire*

$$\sum_{i=1}^{i=p+1} \lambda_i \rho_i^{(p)} = 0,$$

(¹) Séance du 28 octobre 1918.

(²) Au sujet des théorèmes de Jamet, voir : V. JAMET, *Sur les surfaces et courbes tétraédrales symétriques* (*Ann. de l'Éc. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. 4, supplément); G. FOURET, *Construction du rayon de courbure des courbes triangulaires symétriques, des courbes anharmoniques et des lignes asymptotiques de la surface de Steiner* (*Comptes rendus*, t. 110, 1890, p. 778); *Construction du rayon de courbure de certaines classes de courbes, notamment des courbes de Lamé et des paraboles et hyperboles des divers ordres* (*Ibid.*, p. 843); R. GODEFROY, *Sur les rayons de courbure de certaines courbes et surfaces, en particulier des courbes et surfaces de Lamé* (*Journ. de l'Éc. Polyt.*, 62ᵉ cahier, 1892, p. 37); CESÀRO, *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, p. 129; LORIA-SCHÜTTE, *Spezielle ebene Kurven*, t. 1, 2ᵉ édition, p. 344.

(³) Le $p^{\text{ième}}$ rayon de courbure en un point M d'une courbe (C) est le rayon de courbure de la $(p-1)^{\text{ième}}$ développée de (C) au point correspondant à M.

où λ_i désigne la valeur que prend le produit

$$\Pi(\nu_j - \nu_t) \qquad (j, t = 1, 2, \ldots, p+1)$$

quand on y fait $\nu_i = 0$.

II. Extension du théorème de Jamet à une classe de courbes définies en coordonnées projectives ξ_1, ξ_2, ξ_3 :

Soit φ une fonction donnée de deux variables; pour l'une quelconque des courbes définies en coordonnées projectives par l'équation

$$\alpha_1[\varphi(\xi_1, \xi_2) - \varphi(\xi_1, \xi_3)] + \alpha_2[\varphi(\xi_2, \xi_3) - \varphi(\xi_2, \xi_1)] + \alpha_3[\varphi(\xi_3, \xi_1) - \varphi(\xi_3, \xi_2)] = 0,$$

le rayon de courbure correspondant au pôle $\Omega(1, 1, 1)$ du système de coordonnées est dans un rapport constant avec celui de la conique circonscrite au triangle qui la touche en ce point.

Proposition corrélative :

III. *Les fonctions f_i étant données, si trois courbes d'équation cartésienne*

$$\sum_1^3 \alpha_i[f_i(x, y)]^2 = 0,$$

correspondant aux indices n_1, n_2, n_3 se touchent en un même point, leurs rayons de courbure ρ_1, ρ_2, ρ_3 en ce point sont liés par la relation

$$\frac{n_2 - n_3}{\rho_1} + \frac{n_3 - n_1}{\rho_2} + \frac{n_1 - n_2}{\rho_3} = 0.$$

B. Courbes gauches :

IV. *Si φ est une fonction donnée, le plan osculateur de la courbe gauche*

$$\sum_1^3 \alpha_i \varphi(\xi_i) = 0, \qquad \sum_2^4 \beta_i \varphi(\xi_i) = 0 \qquad \left(\sum_1^3 \alpha_i = \sum_2^4 \beta_i = 0\right)$$

correspondant au pôle Ω du système de coordonnées tétraédriques projectives ξ, coïncide avec celui de la cubique gauche

$$\sum_1^3 \frac{k_i}{\xi_i} = 0, \qquad \sum_2^4 \frac{l_i}{\xi_i} = 0$$

qui la touche en ce point. Le rayon de courbure de la courbe en ce point est dans un rapport constant avec celui de cette cubique gauche.

C. Surfaces :

V. *La fonction φ étant donnée, pour l'une quelconque des surfaces définies en coordonnées tétraédriques projectives par l'équation*

$$\sum_1^4 \alpha_i \varphi(\xi_i) = 0 \qquad \left(\sum_1^4 \alpha_i = 0\right),$$

l'indicatrice correspondant au pôle Ω du système de coordonnées est homothétique à celle de la quadrique conjuguée au tétraèdre qui la touche en ce point; le rapport d'homothétie est une constante.

VI. *Soient f_i des fonctions données; si trois surfaces d'équation cartésienne*

$$\sum_1^4 \alpha_i [f_i(x, y, z)]^n = 0,$$

correspondant aux indices n_1, n_2, n_3, se touchent en un point, leurs directions asymptotiques en ce point sont en involution et leurs courbures moyennes σ_1, σ_2, σ_3 sont liées par la relation

$$(n_2 - n_3)\sigma_1 + (n_3 - n_1)\sigma_2 + (n_1 - n_2)\sigma_3 = 0.$$

VII. Théorème analogue au théorème de Jamet. — *Si deux surfaces tétraédrales symétriques d'indices n_1, n_2, ayant même tétraèdre de symétrie, se touchent en un point, les courbures de leurs lignes asymptotiques qui sont tangentes en ce point sont dans le rapport de $(n_1 - 2)$ à $(n_2 - 2)$.*

ASTRONOMIE. — *Sur les lois de densité interne dans les théories du Soleil.* Note de M. Emile Belot, présentée par M. Bigourdan.

Les théories du Soleil fondées sur la Thermodynamique aboutissent à des résultats assez discordants, suivant qu'on part avec Homer Lane et W. Thomson des lois des gaz parfaits ou avec M. Véronnet des lois des gaz réels.

La densité du noyau central du Soleil serait de 8,4; 31,5 ou 1,41, suivant qu'on adopte l'une ou l'autre de ces théories. Mais elles négligent la pression de radiation dont Eddington a montré l'importance à l'intérieur d'une étoile et elles extrapolent dans le domaine de températures et pressions énormes les lois des gaz vérifiées dans nos laboratoires : on a ainsi cru pouvoir affirmer que le Soleil était entièrement gazeux parce que tous ses éléments sont à une température de plus de 6000° dépassant leur température critique. Or on sait, par les recherches de Brigmann poussées jusqu'à une pression de 20000^{atm}, que l'acide carbonique au-dessus de sa température critique (31°) présente plusieurs phases solides pour des pressions supérieures à 6000^{atm}; et, d'autre part, les résultats obtenus par E. Briner montrent que la dissociation moléculaire favorisée par la température peut être annihilée par la pression.

Néanmoins les théories visées plus haut ont deux points communs, elles concluent à l'existence d'un noyau central de densité sensiblement constante et aboutissent à des lois de densité interne présentant une inflexion à une profondeur plus ou moins grande. Il est à remarquer que les formules les plus probables, donnant la loi de densité interne de la Terre d'après M. Véronnet, correspondent à une inflexion vers la distance 0,8 du centre. Mais ces formules cessent de s'appliquer au-dessus de la surface terrestre et aucune loi de densité interne de la Terre ne peut se raccorder sans discontinuité avec la loi de Laplace qui régit la densité de l'air jusqu'aux confins de l'atmosphère. D'après cette analogie, on peut croire que toute loi donnant la densité interne du Soleil considéré comme liquide ne s'applique que jusqu'à la surface de la photosphère, où une discontinuité de densité s'établit avec l'atmosphère solaire.

Il m'a semblé qu'on pouvait, dans une certaine mesure, concilier les théories actuelles en ce qu'elles ont de commun, en admettant que le Soleil est constitué par un noyau central de masse m, de densité constante ρ_0, de rayon ε entouré de couches de densité variable obéissant à la loi

$$\rho = a(r+\varepsilon)^{-\alpha}, \tag{1}$$

où r ne varie que de zéro à $R-\varepsilon$ (R rayon de la photosphère). La formule (1) correspond à une courbe de densité interne tournant sa concavité vers l'axe des ρ positifs, comme dans les théories rappelées plus haut. Elle donne pour ρ_0 une valeur finie $a\,\varepsilon^{-\alpha}$ évitant ainsi l'objection faite à l'emploi de la formule $\rho = ar^{-\alpha}$ qui donne $\rho_0 = \infty$ et qui a été utilisée par H. Poincaré (*Hypothèses cosmogoniques*, p. 201). Les densités ρ_0 et ρ_1 sont alors

liées par la relation

$$\rho_0 = \rho_1 \left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^{-\alpha} \tag{2}$$

a et ρ_1 sont donnés par les formules suivantes :

$$\rho_1 = 1,41\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)\left[1-\frac{\alpha}{3}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^{3-\alpha}\right]^{-1} = a R^{-\alpha}. \tag{3}$$

Si l'on admet le Soleil composé de gaz parfaits en équilibre isothermique, on a $\alpha = 2$. Si, grâce à la pression compensant l'effet de la température, le Soleil contient des vapeurs lourdes non dissociées et ne suivant pas la loi des gaz parfaits, la densité augmente plus vite vers le centre que dans la première hypothèse; on a donc $\alpha > 2$. Mais d'autre part ρ_1 ne peut être supérieur à 1,41, ce qui exige, d'après (3), que $\alpha < 3$.

Calculons l'énergie W emmagasinée par le Soleil depuis l'origine en suivant la marche indiquée par H. Poincaré (*loc. cit.*); on trouve

$$W = \frac{3}{5}\frac{m^2}{\varepsilon} + \frac{(4\pi a)^2}{(3-\alpha)(5-2\alpha)}\left[R^{5-2\alpha} - \varepsilon^{5-2\alpha}\right] - \frac{\alpha\,\varepsilon^{3-\alpha}(4\pi a)^2}{3(\alpha-2)(3-\alpha)}\left[\varepsilon^{2-\alpha} - R^{2-\alpha}\right].$$

Pour $\alpha = \frac{5}{2}$ le second terme se présente sous une forme indéterminée, mais en réalité ne tend vers ∞ que pour $\varepsilon = 0$.

Il est impossible qu'un astre de dimension finie emmagasine une quantité d'énergie infinie; et cette impossibilité correspond à cette autre impossibilité physique d'une densité infinie au centre quand on la calcule par l'expression $ar^{-\alpha}$. H. Poincaré a donc eu raison de ne pas s'arrêter à la valeur $w = \infty$ donnée par cette expression et qu'a signalée M. Auric [1]. Mais avec la formule (1) rien n'empêche d'admettre $\alpha = \frac{5}{2}$, et l'on trouve alors, suivant les valeurs attribuées à $\frac{\varepsilon}{R}$:

$\frac{\varepsilon}{R}$.	$\frac{3}{4}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{6}$.
ρ_1	0,87	0,57	0,40	0,35
ρ_0	1,79	3,24	12,89	31,40

[1] *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 328.

Quand ε est voisin de R, ρ_0 et ρ_1 convergent vers 1,41 comme dans la solution donnée par M. Véronnet.

Quand $\frac{\varepsilon}{R}$ varie de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{6}$, on trouve pour ρ_0 des valeurs de même ordre que celles auxquelles concluent les théories de Lane et de W. Thomson.

On a toujours admis jusqu'ici que l'énergie W emmagasinée par le Soleil depuis l'origine était due entièrement à la gravitation. Mais si un choc entre masses nébuleuses s'est produit à l'origine de notre système, il a dû élever à une haute température au moins la partie centrale de la matière cosmique comme on le voit dans les Novæ.

Les parties extérieures de la nébuleuse ont dû agir comme un nuage opaque protégeant le système solaire primitif contre le rayonnement. Dès lors le premier noyau condensé du Soleil a dû emmagasiner beaucoup plus de chaleur que n'aurait pu lui en donner la gravitation.

Par ce processus, le Soleil aurait pu être pourvu d'une provision de chaleur suffisante pour satisfaire aux exigences des géologues.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Sur le dosage du lactose.* Note de M. E. **Hildt**, présentée par M. A. Gautier.

Le lactose se dose ordinairement dans le lacto-sérum dilué au $\frac{1}{10}$, obtenu lui-même par défécation au moyen de l'acide métaphosphorique, en mesurant le pouvoir réducteur de ce lacto-sérum sur 10^{cm^3} de liqueur cupro-potassique titrée, maintenue à l'ébullition. Cette liqueur peut être titrée directement en lactose hydraté ou anhydre ou en sucre interverti, mais les auteurs diffèrent sur les équivalences, en sorte qu'une liqueur titrant $0^g,05$ en sucre interverti peut varier de $0^g,067$ à $0^g,073$, de lactose hydraté.

Dans la pratique il arrive souvent que le lactose du lait a subi une hydrolyse partielle, en particulier dans les laits bichromatés, et alors aucun coefficient n'a de signification par suite de l'augmentation du pouvoir réducteur dû au dédoublement équimoléculaire du lactose en glucose et galactose. Dans ce cas, la détermination des trois sucres en présence nécessiterait trois équations. La difficulté disparaît si l'on rend l'hydrolyse complète et si l'on connaît le titre de la liqueur cupro-potassique en lactose dédoublé, de même qu'on le connaît en sucre interverti. La somme des deux monosaccharides ainsi déterminée représente bien en effet le lactose hydraté initial.

Mais l'emploi des acides minéraux comme catalyseurs entraîne une destruction notable du galactose et même du glucose par suite du chauffage prolongé à 100° nécessaire au dédoublement du lactose, ainsi que l'a montré Ost. (*Deuts. chem. Ges.*, t. **23**; **2**, p. 3010.)

Certains catalyseurs industriels tels que ceux de Twitchell (*Journ. amer. chem. Soc.*, t. 22, 1899) et ceux de Petrof plus récents n'ont pas cet inconvénient (¹).

Les acides phénol et benzène sulfoniques ou d'autres de séries plus compliquées, employés sous forme de sels barytiques ou sodiques en présence d'une quantité correspondante d'acide sulfurique titré, donnent au contraire d'excellents résultats avec des solutions de lactose pur d'environ 0,5 pour 100. Avec 1 pour 100 d'acide sulfonique, l'hydrolyse est complète après 3 heures et demie à 4 heures de chauffage à 100° sans que le pouvoir réducteur maximum ainsi obtenu diminue après quatre nouvelles heures. Toutefois les lacto-sérums s'hydrolysent plus lentement que les solutions de lactose pur.

Après de nombreux titrages en présence des acides sulfoniques ci-dessus de solutions de lactose purifié par trois cristallisations et vérifiées au polarimètre, une liqueur cupro-potassique en solutions séparées a donné pour 10^{cm^3} de liqueur cuprique, les valeurs suivantes :

Lactose hydraté	0,0708 g
Lactose hydrolysé	0,0506
Sucre interverti	0,0495

La valeur trouvée pour le pouvoir réducteur du lactose hydrolysé se confond presque avec celle qu'on peut déduire des tableaux de G. Bertrand pour des dilutions de même ordre et qui serait de 0,05055.

On peut donc ainsi exprimer en lactose les sucres contenus dans le lait et même déterminer, par un calcul très simple, la proportion de lactose non dédoublé en tirant une première équation du pouvoir réducteur avant hydrolyse totale, mais il est surtout intéressant de pouvoir déterminer en

(¹) Ces catalyseurs plus ou moins complexes, solubles et destinés spécialement à la saponification des graisses, ont tous pour base des dérivés sulfonés de la série du benzène, du naphtalène, de l'anthracène ou des carbures en C^nH^{2n-10} extraits des naphtes russes, les plus simples de ces dérivés.

lactose ce qui subsiste encore des sucres réducteurs dans un lait altéré, afin d'obtenir une valeur de l'extrait dégraissé et par suite de l'extrait sec total au moyen de tous les éléments dosés séparément. L'expérience montre en effet que si cette valeur diffère sensiblement de l'extrait sec à 100°, elle ne diffère que très peu de l'extrait sec dans le vide.

Tous les chimistes qui s'occupent de l'analyse des laits ont pu constater que l'extrait sec à 100° d'un lait altéré présente souvent un déficit notable qu'il est impossible de ne pas attribuer en très grande partie à une destruction des sucres, comme on peut s'en assurer directement en dosant ces sucres dans l'extrait sec à 100°.

Si l'on observe d'une part que la présence fréquente dans les laits altérés de quantités considérables de CO^2 n'est que rarement accompagnée d'alcool d'origine fermentative et que d'autre part les matières albuminoïdes ont également subi l'hydrolyse partielle, la modification subie par les extraits à 100° doit être expliquée par les réactions des polypeptides sur les sucres réducteurs, réactions qui ont fait l'objet de recherches précises que M. L. Maillard a exposées dans sa Thèse de doctorat (Faculté des Sciences, Paris, 1913), avec cette particularité que les produits mélanoïdiques azotés de Maillard paraissent se former ici en deux phases; dans la première phase les carboxyles aminés fourniraient aseptiquement, dès la température ordinaire, une quantité d'acide carbonique quelquefois suffisante pour faire éclater les flacons, mais ce n'est qu'au moment de l'évaporation du lait à 100° que ces produits de condensation caramélique se forment par une déshydratation rapide et avec un très faible dégagement d'acide carbonique, ainsi que l'ont montré de nombreux extraits secs obtenus d'abord dans un vide prolongé puis portés à 100°.

Ces extraits dans le vide ne sont ni colorés ni odorants, la couleur foncée et l'odeur des produits mélanoïdiques apparaissent au contraire de suite à l'étuve; la perte de poids constatée est souvent très notable, et si l'on dose en même temps l'acide carbonique produit pendant cette deuxième phase, on n'en trouve plus que des quantités très faibles.

Voici à titre d'exemple quelques-uns des résultats obtenus :

Valeur du lactose et des extraits dans des laits altérés.

Lors du prélèvement		46,0	35,6	50,1	45,4	49,7	50,1	46,1
Lait altéré.	Avant hydrolyse (lactose hydraté apparent).	54,0	38,08	52,5	»	49,2	49,6	41,2
	Après hydrolyse (lactose hydraté réel).	39,7	28,0	40,2	30,2	42,5	40,0	38,9
	Dans l'extrait à 100°	25,4	16,5	27,5	16,6	»	»	»
	Extrait à 100°	101,1	85,8	107,9	112,2	111,7	111,5	112,2
	Extrait dans le vide	109,0	93,9	115,0	122,4	119,14	121,17	116,2
	CO^2 dégagé à 100°	0,4	»	0,48	»	»	»	»
Extraits lors des prélèvements à 100°		111,9	92,4	123,8	»	124,3	126,7	119,6

D'après ces résultats il semble intéressant de rechercher si les réactions de Maillard entre les sucres et les polypeptides ne permettraient pas de reconstituer par le calcul, au moins approximativement, la valeur des extraits secs primitifs des laits altérés, de l'extrait sec à 100° et de la quantité de sucre disparue dans cet extrait.

PALÉONTOLOGIE. — *Sur la présence d'un fasciole chez un Procassidulide.* Note de M. J. **Lambert**, présentée par M. Douvillé.

On sait que le fasciole de certains Echinides, organe dont le rôle physiologique reste encore mystérieux, a toujours été considéré comme spécial aux Spatangides. Les paléontologues (de Loriol et Grégory), qui ont distrait les Collyrites des Procassidulides pour les rapprocher des Spatangides, déclarent cependant que les Collyrites n'ont pas de fasciole. Je partageais ces opinions, quand l'examen des récoltes de M. le Dr Guébhard dans le Néocomien de la Provence m'a amené à reprendre l'étude d'un petit groupe de *Collyritidæ* pour lequel Pomel avait proposé le genre *Corthya*. J'ai pu à cette occasion constater deux faits : 1° les espèces de ce genre ont leurs ocellaires latérales externes, ce qui les éloigne de *Collyrites* pour les rapprocher de *Disaster;* 2° certaines de ces espèces sont pourvues d'un fasciole.

Ooster avait bien figuré un fasciole chez un *Corthya*, son *Collyrites*

Meyrati, mais sans mentionner ce caractère dans le texte, et personne n'avait attaché à cette figure l'importance qu'elle comporte. En réalité, chez les *Corthya*, le périprocte marginal s'ouvre au milieu d'un écusson tuberculeux qui, à partir de l'époque hauterivienne, est circonscrit par un anneau de très fins granules, serrés, en quinconce, c'est-à-dire par un véritable fasciole, plus ou moins distinct suivant les individus. Ce fasciole existe, non seulement chez *Corthya Meyrati* du Néocomien alpin, mais chez *C. ovulum* Desor (*Disaster*) de l'Hauterivien et chez une espèce nouvelle du Barrémien de la Provence, mais il manque encore chez *Corthya Malbosi* de Loriol (*Collyrites*) du Berriasien, comme chez *C. Jaccardi* Desor (*Collyrites*) du Valanginien. Le fasciole n'est donc pas un organe spécial aux Spatangides; il s'est montré chez des Procassidulides dès l'Hauterivien. Enfin, à son origine chez les *Disasteridæ*, comme à son origine chez les *Ananchitidæ* ou les *Brissidæ*, le fasciole est un organe encore instable, qui a commencé à se montrer individuellement, bien qu'un peu plus tard, définitivement fixé, il ait acquis dans les mêmes groupes une permanence qui a permis à tous les auteurs de le considérer comme un excellent caractère générique.

Il y a là, au point de vue de la formation de nouveaux organes chez l'être vivant pendant le cours des périodes géologiques, un fait d'autant plus intéressant à constater qu'il peut nous mettre sur la trace du processus de cette genèse.

PALÉOBOTANIQUE. — *Caractères distinctifs des flores houillères de Saint-Etienne et de Rive-de-Gier*. Note de M. **Paul Bertrand**, présentée par M. Pierre Termier.

Le faisceau houiller de Rive-de-Gier renferme une flore très différente de celle des couches de Saint-Étienne. Le Tableau ci-contre est destiné à mettre en évidence les caractères distinctifs des deux flores.

Il y a lieu de compléter ce Tableau par les remarques suivantes :

1. Le *Sphenopteris chærophylloides* Br. est assez fréquent dans la zone de Bruay-Liévin (= Lens supérieur).

2. Les *Linopteris* (de Rive-de-Gier). — Les *Linopteris* sont rares à Rive-de-Gier. L'absence des grandes pinnules de *L. Brongniarti* et de *L. Germari* est frappante. On trouve seulement çà et là de petites pinnules de *L. obliqua*

Espèces caractéristiques de la série de Saint-Étienne, très rares ou absentes à Rive-de-Gier.	Espèces caractéristiques du faisceau de Rive-de-Gier, frappantes par leur fréquence ou simplement par leur présence.	Exemples d'espèces banales, fréquentes à Saint-Étienne et à Rive-de-Gier.
**Odontopteris Reichiana* Gutbier.		
O. Brardi Brongn.		
Nevropteris cordata Brongn.		*Alethopteris Grandini* Brong. (1).
**Callipteridium pteridium* Schl.		
C. gigas Gutb.		*Pecopteris polymorpha* Brong.
Pecopteris lepidorachis Brong.	*Pecopteris Lamuriana* Heer (C.).	*P. unita* Schl.
P. hemitelioides Brong.	*P. arborescens* Schl. (C.).	
P. Bioti Brong.	*P. cf. dentata* Brong. (A. C.).	
**P. feminæformis* Schl.		
Diplotmema Busqueti Zeill.	*Sphenopteris chærophylloides* Brong. (A. C.).	*Sphenopt.* (*Pecopt.*) *Sterzeli* Zeill.
Sphenopteris (*Zygopt.*) *pinnata* Gr.'E.	*Sph.* (*Zygopt.*) *erosa* Gutb. (C.).	+ *Sph. Plückeneti* Schl.
Linopteris Brongniarti Gutb.	*Linopteris obliqua* Bunbury (A. R.).	
L. Germari Giebel.	*L. nevropteroides* Gutb. (A. R.).	
Cordaites lingulatus Gr.'E.	*Sigillaria Deutschi* Br. (C.).	*Sigillaria Brardi* Brong.
Poacord. linearis Gr.'E.	*S. tessellata* Br. (C.).	
	Asolanus camptotænia Wood (C.).	
Sphenophyllum longifolium Germ.	*Sphenophyllum majus* Bronn.	*Sphenophyllum oblongifolium* Germ. et Kaulf.
	Sph. emarginatum Brong.	Calamariées diverses.

* Les espèces précédées d'un astérisque font leur apparition à Rive-de-Gier; elles sont noyées au milieu des espèces caractéristiques de cet étage. — (C.), commun; (A. C.), assez commun; (A. R.), assez rare.

(1) Sensiblement plus rare à Rive-de-Gier qu'à Saint-Étienne.

Bunbury (= *L. sub. Brongniarti* Gr.'E.) et des pinnules de *L. nevropteroides* Gutb. On sait que *L. obliqua* se rencontre en abondance dans la zone de Bruay.

3. Les *Sphenophyllum* (de Rive-de-Gier). — On trouve à Rive-de-Gier au moins trois espèces de *Sphenophyllum : S. majus* Bronn., *S. emarginatum* Brong., *S. oblongifolium* Germar. Les deux premières sont les plus fréquentes. Elles sont communes dans la zone de Bruay.

4. Les *Sigillaires* (de Rive-de-Gier). — L'abondance des Sigillaires cannelées à Rive-de-Gier est frappante. Plusieurs espèces sont identiques ou affines à celles de la zone de Bruay. Ex. : *S. Deutschi*, *S. tessellata*, *S. aff. scutellata*. La houille de Rive-de-Gier, d'après Grand'Eury, est essentiellement constituée par des débris de Sigillaires cannelées; celle des couches inférieures de Saint-Etienne est au contraire une houille de Cordaïtes.

5. Les *murs* des couches de Rive-de-Gier, surtout ceux des couches inférieures, sont parcourus en tous sens par les rhizomes et les radicelles du *Stigmaria ficoides*, var. *minor* Geinitz, qui représentent les parties souterraines des Sigillaires cannelées. Ils témoignent que le mode de formation des couches de houille n'est pas, dans le centre, autre que dans le nord de la France.

6. L'*Asolanus camptotœnia*, fréquent dans la zone de Bruay, est aussi fréquent à Rive-de-Gier.

Les remarques 1 à 6 soulignent les affinités existant entre la flore de Rive-de-Gier et celle de Bruay-Liévin (Westphalien supérieur du nord de la France).

7. Les espèces du Tableau, suivies d'un C, sont les plus caractéristiques de Rive-de-Gier. Pourtant, il est certain que le *Pecopteris arborescens*, les Sigillaires cannelées, l'*Asolanus camptotœnia* s'élèvent dans l'étage intermédiaire entre Rive-de-Gier et Saint-Etienne, mais ces espèces deviennent de plus en plus rares; elles sont *noyées* au milieu de celles de Saint-Etienne.

8. Le *Pecopteris arborescens* Schl. est remplacé dans la série de Saint-Etienne par les *P. lepidorachis* Br. et *P. hemitelioides* Br., qui en dérivent très probablement. Il persiste jusque dans les couches inférieures de Saint-Etienne. Le *P. cyathea* (Schlotheim ?) de Brongniart, Zeiller,

Grand'Eury, etc., doit être rayé de la nomenclature, car il repose sur une confusion entre les trois autres espèces.

9. Il y a encore des Sigillaires cannelées dans les couches de Saint-Etienne, y compris dans la 3e. Il importera d'arriver à les déterminer correctement. Sous aucun rapport, ces Sigillaires cannelées n'ont à Saint-Etienne l'importance qu'elles ont à Rive-de-Gier.

10. L'*Odontopteris Reichiana* et le *Callipteridium pteridium*, d'après Grand'Eury, se montrent déjà à Rive-de-Gier, où ils sont très rares. Le *Pecopteris feminæformis*, si commun à Saint-Etienne, est rarissime à Rive-de-Gier.

HORTICULTURE. — *Sur un dispositif nouveau pour l'emploi des explosifs appliqués à la plantation des arbres. De son utilisation avantageuse dans la reconstitution rapide des vergers dévastés par l'ennemi.* Note de M. **André Piédallu**, présentée par M. Costantin.

En ce moment tant désiré de la libération de nos territoires, un grave problème se pose : la reconstitution rapide des vergers dévastés par l'ennemi.

J'ai remarqué que les plantes sauvages se développent avec une rare vigueur sur les bords des anciens trous d'obus et des vieilles tranchées bouleversées par les explosifs. Sans nul doute cette croissance est due à la fissuration du sol et à son imprégnation par les produits nitrés.

Cette remarque m'a rappelé les expériences faites dans l'ouest des États-Unis et citées par Étienne-A. Ritter dans la *Nature* du 5 avril 1913 (Masson, éditeur). Des cerisiers de deux ans, plantés dans des trous creusés à la dynamite, atteignent plus de 3^m de haut, alors que les mêmes arbres plantés à la bèche restent chétifs et ont à peine $1^m,50$.

Nous avons, le regretté Armand Malloué et moi, cherché l'application pratique de ces observations de guerre et de ces expériences américaines pour la reconstitution rapide des vergers dévastés. Malheureusement beaucoup d'arbres sciés à la base par l'ennemi ne pourront pas être greffés.

Nous avons établi la composition d'un explosif insensible au choc et à l'humidité, pouvant être moulé, complètement exempt de produits

chlorés, très énergique sous un faible volume et ne détonant que sous l'action d'une amorce au fulminate.

A cette cartouche, j'ai pensé à joindre un culot de produits fertilisants variables suivant les terrains : phosphates, nitrates, potasse, etc.

La cartouche se présente comme suit : Un tube en celluloïd, en papier fort ou en carton, sert d'enveloppe. Il est terminé en cône ou fermé par un bouchon de même forme.

L'engrais comprimé est placé au fond du tube. Il entoure un noyau d'explosif. Puis vient le cylindre d'explosif dans lequel est ménagée une cavité pour l'amorce de fulminate. Le tout est fermé par un bouchon percé d'un trou, par lequel passe à frottement un peu serré le cordeau bickford relié à l'amorce. La charge explosive et le culot adjonctif sont extérieurement paraffinés.

Pour l'application, on creuse un trou de mine de 60^{cm} avec un pieu en fer ou tout autre moyen. Dans les terrains favorables, on alèse ce trou avec un cône en bois d'un diamètre un peu plus fort que celui de la cartouche jusqu'à 60^{cm} de profondeur et l'on introduit la cartouche ; puis on allume et l'on va se mettre à l'abri.

L'explosion produit une cavité sphéroïdale d'environ 80^{cm} de profondeur, dont les parois sont très profondément fissurées. On laisse la terre absorber les vapeurs dégagées et l'on n'a plus qu'à planter l'arbre en rabattant la terre sur les racines.

Dans ces conditions, l'arbre qui trouve, pulvérisés et intimement mélangés au sol, tous les éléments nécessaires à son développement, ne peut pas manquer de pousser vigoureusement et de produire des fruits en un minimum de temps.

Cette méthode est surtout utile dans des terrains compacts où les moyens habituels de plantation font des murs devant lesquels les radicelles sont bloquées.

En résumé, il est à recommander, pour la reconstitution rapide des vergers dévastés par l'ennemi, de faire des plantations dans des cavités obtenues à l'aide d'explosifs ne contenant pas de produits nocifs pour les plantes (chlore), ces explosifs servant en même temps à pulvériser et à souffler les matières fertilisantes dans les fissures profondes du sol.

Il est évident que ce procédé s'applique à toutes les plantations d'arbres et qu'il pourrait rendre de grands services dans les colonies, puisqu'il diminue énormément la main-d'œuvre et favorise la pousse.

THÉRAPEUTIQUE. — *Essai de traitement de la grippe par la plasmothérapie (injections intra-veineuses de plasma de convalescent)*. Note de MM. A. Grigaut et Fr. Moutier, présentée par M. Charles Richet.

Nous avons été frappés de ce fait que la grippe, maladie cyclique, tourne court vers le septième jour (dans un sens favorable ou non) que des complications broncho-pulmonaires soient ou non en cause. Nous avons pensé qu'en fournissant à l'organisme dès le début de l'infection les substances immunisantes qu'il doit élaborer pour faire les frais de la crise, on pourrait abréger et rendre favorable le cycle morbide.

Les différents essais d'hématothérapie, d'auto- ou d'hétérosérothérapie auxquels nous avons procédé selon les procédés actuels, ne nous ayant pas donné de résultats bien probants, nous avons eu recours à la plasmothérapie intra-veineuse, telle qu'elle vient d'être instituée par MM. Charles Richet, P. Brodin et Saint-Girons ([1]). Démontrant l'innocuité absolue du plasme de cheval en injection intra-veineuse chez le chien, ces auteurs indiquaient en même temps les bénéfices qu'on pouvait espérer de cette méthode dans le traitement des hémorragies graves et des infections.

Nos essais ont porté exclusivement sur des grippes à forme pulmonaire. Les donneurs, indemnes de tout antécédent syphilitique, paludéen, etc., étaient des convalescents de complications très graves. La saignée fut faite du quatrième au sixième jour de la convalescence, selon la technique suivante :

Le sang est prélevé dans la veine du pli du coude au moyen d'une grosse aiguille. On le reçoit, avec toutes les précautions aseptiques, dans des ballons stériles renfermant quelques centimètres cubes d'une solution de citrate de soude à 10 pour 100. La quantité de citrate de soude est calculée de manière à obtenir un mélange citraté à 4 pour 1000. Il est important, pour éviter les coagulations, d'agiter le récipient pendant toute la durée de la saignée et de veiller à ce qu'aucune parcelle du sang recueilli n'ait été en contact avec les tissus. Après sédimentation spontanée des hématies à basse température, le plasma décanté est enfermé dans des vases stériles. Si, par suite d'une décantation trop brusque, quelques hématies venaient souiller le plasma, il n'y a pas lieu de s'en préoccuper.

Les injections auxquelles nous avons procédé sur l'homme correspondent à des plasmas âgés de 4 heures au moins et de 8 jours au plus, c'est-à-dire à des saignées faites depuis un temps compris entre ces deux limites. Nous avons pris le soin, dans

([1]) *Comptes rendus*, t. 167, 1918, p. 618.

nos premiers essais, de vérifier préalablement, par injection intra-veineuse au lapin, l'innocuité des plasmas destinés à l'homme. Indifféremment, nous avons employé le plasma fourni par un seul sujet ou le mélange de plasmas provenant de plusieurs donneurs. L'injection a été pratiquée lentement à la seringue ou plus commodément à l'aide d'un dispositif à écoulement continu dans le cas de fortes doses. Ces doses ont varié entre 50^{cm^3} et 500^{cm^3} en 24 heures en une seule injection ou en injections répétées, sans que dans aucun cas nous n'ayons observé de réaction immédiate ou éloignée.

Il existe un constraste remarquable entre la sécurité que présente l'injection de plasma et la surveillance attentive que nécessitent toujours plus ou moins les injections intra-veineuses de sérums spécifiques ou de métaux colloïdaux.

Les résultats thérapeutiques obtenus sont entièrement différents selon que le traitement est précoce ou tardif. Sur 65 cas de grippe à forme pulmonaire reçus dans notre serviee, 10 choisis parmi les plus graves d'emblée ont subi le traitement plasmothérapique. 8 traités avant le troisième jour ont été l'objet *d'une amélioration immédiate, saisissante, sous le triple rapport de la température, de l'état général et des accidents pulmonaires;* brusquement la maladie tourne court et la crise se produit en 24 heures. Il a suffi la plupart du temps d'une seule injection de 60^{cm^3} et pour obtenir un tel résultat.

Au contraire, dans les deux autres cas traités après le cinquième jour, la maladie a suivi son évolution fatale, malgré les fortes doses employées (500^{cm^3} en 24 heures).

Ainsi donc l'injection intra-veineuse de plasma de convalescent, pratiquée au début de la grippe, semble hâter l'immunisation de l'organisme et provoque une crise précoce. Pratiquée à une période tardive de la maladie, cette thérapeutique reste sans effet, comme si à ce stade ultime l'organisme n'était pas plus capable d'utiliser les substances immunisantes qu'on lui fournit, qu'il n'a été capable de provoquer sa crise de par lui-même.

Remarques de M. **Charles Richet** *à propos de la plasmothérapie.*

J'ai fait, avec P. Brodin et Saint-Girons, chez l'homme, quelques injections de plasma de cheval, soit aux armées, dans l'ambulance de Ockinczye; soit à Paris, dans le service d'Ed. Lesné à l'hôpital Tenon. Le moment n'est pas venu encore d'en parler. Tout ce que je puis dire, c'est que chez les huit malades ou blessés qui ont reçu du plasma de cheval, il n'y

a pas eu d'accident immédiat ou tardif, même quand la dose injectée a été assez forte, de 350^{cm^3}.

A plus forte raison, la plasmothérapie de plasma humain, celle qu'ont faite MM. Grigaut et Moutier, dans le traitement de la grippe, doit-elle être inoffensive, puisque même la plasmothérapie de plasma hétérogène a paru jusqu'à présent être sans nocuité.

M. L. Reutter de Rosemont adresse une note intitulée : *Contribution à l'étude de nouvelles méthodes extractives et de dosage des alcaloïdes.*

A 16 heures et quart l'Académie se forme en comité secret.

COMITÉ SECRET.

La commission chargée de présenter une liste de candidats à l'une des places de membres de la division des sciences appliquées à l'industrie, présente, par l'organe de M. le Président, la liste suivante :

En première ligne.	M. Maurice Leblanc
En seconde ligne, ex æquo et par ordre alphabétique.	MM. Georges Charpy Auguste Rateau
En troisième ligne, ex æquo et par ordre alphabétique	Hilaire de Chardonnet Georges Claude Charles Rabut

Les titres de ces candidats sont discutés.

L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

La séance est levée à 17 heures et demie.

É. P.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans les séances de septembre 1918 (*suite et fin*).

Eighteenth and *Seventeenth report of the Michigan Academy of science,* by Richard A. Smith. Lansing, Michigan, Crawford Co, 1916; 2 vol. 23^{cm}.

The nautical almanac and astronomical ephemeris for the year 1921, *for the meridian of the royal Observatory at Greenwich.* London, published by his Majesty's stationery Office, 1918; 1 vol. 23^{cm}.

Annuario demographico. Secção de estatistica demographo-sanitaria. Anno XXIII: 1916. São Paulo, Typ. do Diario Official, 1917; 1 vol. 27^{cm}.